Laboratorul 5

Proiectarea filtrelor de tip FIR

Filtrele cu raspuns finit la impuls (FIR) sunt caracterizate de urmatoarea functie de transfer:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\cdot z^{-n} = h[0]+h[1]\cdot z^{-1}+h[2]\cdot z^{-2}+...+h[N-1]\cdot z^{N-1} \quad (1.1)$$

iar raspunsul la impuls al filtrului este dat de formula:

$$h[n]=h[0]+h[1]\cdot\delta[n-1]+h[2]\cdot\delta[n-2]+...+h[N-1]\cdot\delta[n-N+1] \quad (1.2)$$

Dupa cum se observa din formulele (1.1) si (1.2), caracterul finit al raspunsul filtrului provine din faptul ca implementarea functiei de transfer nu contine bucle de reactie. Aceasta este principala deosebire dintre filtrele de tip FIR si cele de tip IIR.

Raspunsul filtrului la un semnal de intrare $x[n]$ este dat de convolutia dintre acesta si raspunsul la impuls al filtrului:

$$y[n]=\sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]y[n-k] \quad (1.3)$$

De asemenea, transformata Fourier in timp discret a lui h[n] este data de relatia:

$$H(\omega)=H(z)\Big|_{z=e^{-j\omega n}} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\omega n} \quad (1.4)$$

si poate fi exprimata astfel $H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ unde $\varphi(\omega)$ reprezinta faza filtrului.

Raspunsul la impuls se obtine $h[n]$ se obtine din $H(\omega)$ prin relatia:

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega \quad (1.5)$$

Avantajele filtrelor FIR provin din faptul ca implementarea acestora nu contin bucle de reactie:

- posibiliatatea a de realiza filtre cu caracteristica de faza liniara.
- sunt stabile (provine din faptul ca functia de transfer nu contine poli)
- cuantizarea coeficientilor filtrului nu afecteaza stabilitatea
- influenta zgomotului de rotunjire poate fi micsorat in sistemele nerecursive.

Principalul dezavantaj al acestor filtre este determinat de faptul ca in anumite aplicatii ordinul N al filtrului este relativ mare. Acesta determina pe de o parte intarziere de grup mare iar pe de alta parte necesitatile computationale mai ridicate in cazul filtrelor de tip FIR in comparatie cu cele de tip IIR.

Filtre de tip FIR cu faza liniara

Un filtru este de faza liniara daca faza acestuia poate fi exprimata astfel :

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha \cdot \omega \qquad (1.6)$$

De asemenea se poate defini intarzirea de grup ca fiind definita de relatia:

$$\tau_g(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \qquad (1.7)$$

Daca $\tau_g(\omega)$ este constanta atunci se poate spune ca toate frecventele unui semnal sunt intarziate identic. De exemplu raspunsul unui semnal $e^{j\cdot\omega_0 n}$ aplicat unui filtru $H(\omega)$ este:

$$e^{j\cdot\omega_0 n} \to |H(\omega_0)| \cdot e^{j\cdot\omega_0 n} \cdot e^{j\varphi(\omega_0)} \qquad (1.8)$$

Daca faza filtrului este liniara (relatia (1.6)) atunci raspunsul filtrului va fi $|H(\omega_0)| \cdot e^{j[\beta+\omega_0\cdot(n-\alpha)]}$

Filtrele de faza liniara sunt folosite intens in aplicatiile in care este importanta pastrarea formei semnalului.

A1: De exemplu, pentru un filtru de tip FTT calculati raspunsul unui semnal peridic dreptunghilar cu factorul de umplere 50% (x(t)), cu amplitudine 1 si perioada T=0.1s. Reprezentati grafic raspunsul filtrului (y(t)) si apoi semnalul obtinut prin inlocuirea lui $\varphi(\omega) = -arctg(\omega K)$ ***cu*** $\varphi(\omega) = -\omega K$ ***(K este o constanta oarecare).***

- Seria Fourier a unui semnalului x(t) este:

$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \cdot e^{jn\Omega t}, \quad \Omega = 2\pi / T \qquad (1.9)$$

Se poate folosi fisierul l:/4ME_CIPS/laboratorul 4/lab4.m

In general filtrele de tip FIR sunt folosite in aplicatiile in care se doreste pastrarea "*formei*" semnalului.

Pentru a avea faza liniar variabila, raspunsul la impuls al filtrului discret trebuie sa fie simetric (h[n]=h[N-1-n]) sau antisimetric (h[n]=-h[N-1-n]). Combinat cu faptul ca filtrul poate avea lungime N para sau impara se obtin astfel 4 tipuri de filtre FIR cu faza liniara.

A2 Demonstrati ca filtrele FIR care au urmatoarele raspunsurile la impuls h1=[1 2 2 1] si respectiv h2=[1 2 -2 -1] sunt de faza liniara.

Metode de proiectare a filtrelor FIR cu faza liniara.

a Metoda ferestrei.

Metoda consta in 2 etape:

- Se determina raspunsul la impuls, $h_d[n]$, a unui filtru $H_d(\omega)$ ideal folosind relatia (1.5).
- Deoarece se doreste ca $h[n]$ sa fie cauzal se deplaseaza la dreapta $h_d[n]$ cu (N-1)/2 esantioane:

$$h_d[n] \rightarrow h_d[n-(N-1)/2]$$

- Se trunchiaza $h_d[n]$ prin inmultire cu o fereastra $w[n]$ definita pe intervalul [0:N-1].

$$h[n] = h_d[n] * w[n] \tag{1.10}$$

A3: Sa se scrie in Matlab un script care calculeaza raspunsul la impuls a unui FTJ de tip FIR cu faza liniara care are frecventa de taiere ω_C =0.3π si cu lungimile N 83, 63, 43 si respectiv 23. Se va folosi o fereastra dreptunghiulara definita pe intervalul [1:N . (in Matlab functia sinc se defineste astfel $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ ***).***

Sa se afiseze caracteristicile de frecventa si de faza ale filtrelor proiectate.

Observati cum variaza amplitudinea riplurilor cu lungimea filtrului.

Obs: Raspunsul la impuls a unui FTJ ideal cu frecventa de taiere ω_c este data de relatia:

$$h_{FTJ}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}, \quad n = -\infty..\infty \tag{1.11}$$

Se va folosi functia Matlab `freqz`.

A4: Sa se scrie in Matlab un script care calculeaza raspunsul la impuls a unui FTS de tip FIR cu faza liniara cu frecventa de taiere wc=0.3*pi si cu lungimile 82, 62, 42 si respectiv 22. Se va folosi o fereastra dreptunghiulara definita pe intervalul [1:N]. Sa se afiseze caracteristicile de frecventa si de faza ale filtrelor proiectate.

Observati cum variaza amplitudinea riplurilor cu lungimea ferestrei.

Obs: Raspunsul la impuls a unui FTS ideal cu frecventa de taiere ω_c este data de relatia:

$$h_{FTS}[n] = \begin{cases} 1-\dfrac{\omega_c}{\pi}, & \text{daca} \quad n = 0 \\ \dfrac{-\sin(\omega_c n)}{n\pi}, & \text{daca} \quad |n|>0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Se va folosi functia Matlab `freqz`.

Raspunsurile la impuls pentru filtrele trece banda si opreste banda ideale cu frecventele de taiere la ω_{c1} si ω_{c2} sunt:

$$h_{FTB}[n] = \frac{\sin(\omega_{c2} n)}{n\pi} - \frac{\sin(\omega_{c1} n)}{n\pi}, \text{ pentru } -\infty \le n \le \infty \tag{1.13}$$

si respectiv:

$$h_{FOB}[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & \text{daca n=0} \\ \dfrac{\sin(\omega_{c1} n)}{n\pi} - \dfrac{\sin(\omega_{c2} n)}{n\pi}, & \text{daca } |n| > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Principalul dezavantaj al folosirii ferestrei dreptunghiulare este prezenta lobilor de amplitudine relativ mare ceea ce determina aparitia riplurilor in banda de trecere si in cea de oprire. Cu cat fereastra este mai abrupta, cu atat riplurile vor fi mai pronuntate. De aceeea in practica se folosesc ferestre cu marginile mai putin abrupte.

Mai jos se prezinta cateva exemple de ferestre definite in Matlab:

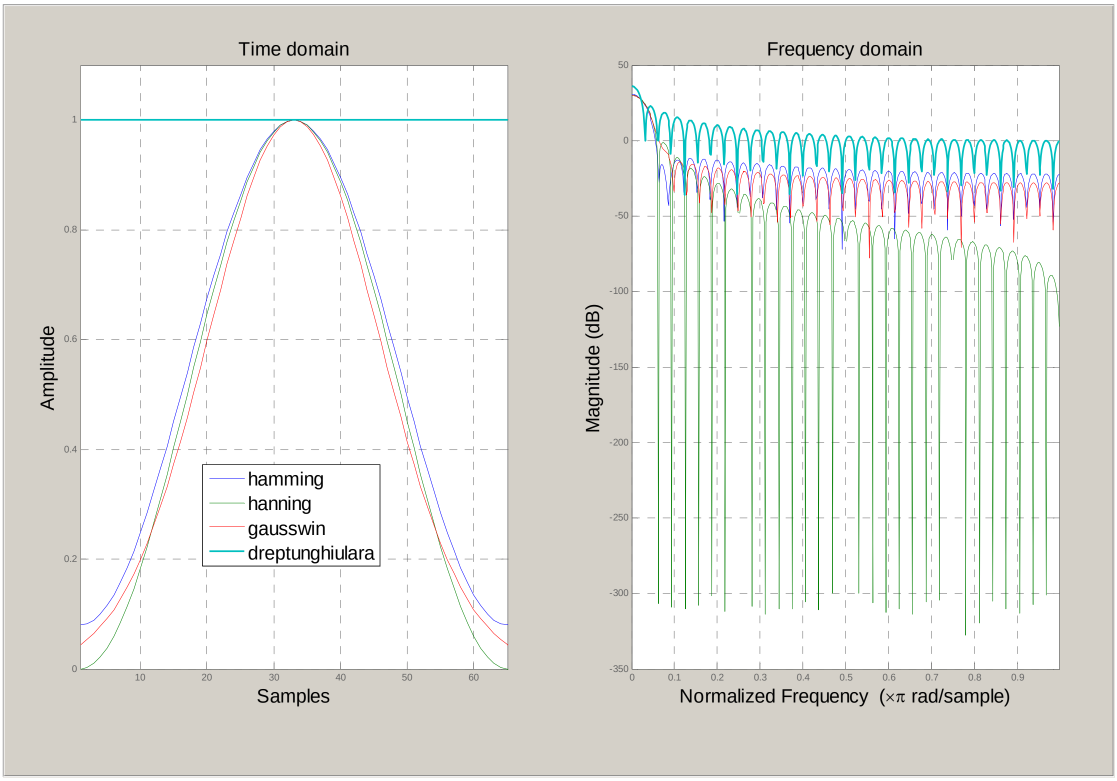

Figura 1: Exemple de ferestre: Hamming, Hanning, Gausswin, si dreptunghiulara

In Matlab, ferestrele pot fi generate folosind functiile: `hamming`, `hann`, `gausswin` etc.

A5: Pentru N=43 reluati aplicatiile A2 si A3 inlocuind fereastra dreptungiulara cu una din ferestrele de mai sus. Sa se afiseze caracteristicile de frecventa si de faza ale filtrelor proiectate. Care este diferenta dintre filtrele FIR proiectate cu ferestra dreptunghiulare si cele implementate cu celelalte tipuri de ferestre.

Dezavantajele medotei ferestrelor sunt:

- nu pot fi controlate cu exactitate frecventele de taiere ale filtrelor
- nu este folosibila obtinerea unei caracteristici de atenuare cu minimele si maximele egal departate de caracteristica ideala.

Proiectarea filtrelor de tip FIR folosind fdatool.

Deschideti utilitarul tastand fdatool in linie de comanda.

Realizati un proiect in Simulink folosind un filtru proiectat. Se vor folosi semnale de intrare astfel incat sa puteti verifica filtrul proiectarii.